

## الگوریتم زمان خطی برای پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف توری $L$ -شکل با یک حفره مستطیلی با اندازه فرد

مهران زالی قهی<sup>۱</sup>، فاطمه کشاورز کوهجردی<sup>۲\*</sup>

\*نویسنده مسئول، دریافت: ۰۰/۰۰/۰۰، بازنگری: ۰۰/۰۰/۰۰، پذیرش: ۰۰/۰۰/۰۰ (تاریخ‌ها توسط نشریه وارد می‌شوند)

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

### چکیده

مسیر همیلتونی، در بسیاری از حوزه‌ها از جمله ریاضیات و صنعت، کاربردهای زیادی دارد. مسیر همیلتونی، مسیری در گراف است به طوری که هر رأس دقیقاً یک بار در آن ملاقات می‌شود. ثابت شده است که مسئله پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف‌های عمومی، ان پی-کامل است. همچنین برای گراف‌های توری عمومی نیز این مسئله در دسته مسائل ان پی-کامل قرار می‌گیرد. در این مقاله، این مسئله را برای زیرکلاس خاصی از گراف‌های توری، به نام گراف توری  $L$ -شکل با یک حفره مستطیلی که اندازه کل گراف فرد است، حل کرده‌ایم و شرایط لازم و همچنین الگوریتم ساخت مسیر را ارائه داده‌ایم. در نهایت نشان داده‌ایم که این الگوریتم در زمان خطی مسیر همیلتونی بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  در این گراف‌ها را به دست می‌آورد.

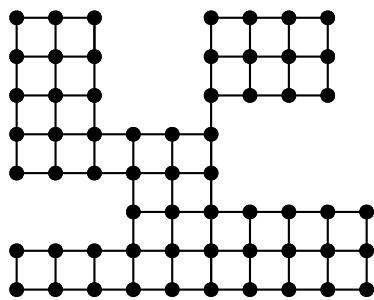
**کلمات کلیدی:** مسیر همیلتونی، دور همیلتونی، گراف توری، گراف توری  $L$ -شکل با یک حفره مستطیلی، ان پی-کامل.

### ۱- مقدمه

مسئله کافی است نقاط سیاه تصویر پیکسلی را معادل رئوس یک گراف توری در نظر بگیریم به طوری که بین هر دو رأس یال وجود داشته باشد اگر و تنها اگر پیکسل‌های متناظر با آن رئوس با هم مجاور باشند. حال مسیر همیلتونی را بین دو رأسی که در مسئله مشخص شده است، به دست می‌آوریم و در گام آخر این مسیر را به الگوریتم تولید پیچ و خم تصادفی می‌دهیم تا الگوی پیچ و خم متناظر با آن را تولید کند (شکل ۱). دقت داشته باشید که این مسئله در صورت موجود بودن مسیر همیلتونی در گراف ساخته شده از روی عکس پیکسلی، قابل حل است.



بسیاری از مسائل دنیای واقعی در کلاس ان پی-کامل<sup>۱</sup> قرار می‌گیرند. از جمله این مسائل می‌توان به مسئله مسیر همیلتونی<sup>۲</sup> اشاره کرد. مسیر همیلتونی مسیری در گراف است که از هر رأس<sup>۳</sup> دقیقاً یک بار عبور کند. مسئله مسیر همیلتونی یکی از مسائل مشهور در نظریه گراف است و کاربردهای بسیاری در ریاضیات و صنعت دارد. در حالت کلی این مسئله برای گراف‌های عمومی ان پی-کامل است. همچنین برای برخی از گراف‌ها از جمله گراف‌های توری عمومی<sup>۴</sup> نیز ثابت شده است که این مسئله در کلاس ان پی-کامل قرار دارد. برای مسئله مسیر همیلتونی برخلاف اهمیت و کاربردی بودن آن‌ها، به دلیل ماهیت سخت‌شان نتایج کمی وجود دارد. از این رو در این مقاله روی این مسئله تحقیق می‌شود. یکی از کاربردهای مسیر همیلتونی، در مسئله ماز<sup>۵</sup> از روی یک تصویر سیاه و سفید پیکسلی<sup>۶</sup> است [۱]. ورودی این مسئله یک تصویر سیاه و سفید شطرنجی به همراه دو نقطه ورود و خروج از پیچ و خم است و خروجی آن یک الگوی پیچ و خم تصادفی می‌باشد به طوری که جواب این پیچ و خم، ظاهری متناظر با عکس داده شده داشته باشد. برای حل این



شکل ۴. گراف توری بدون حفره

در این مقاله، مسئله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  در کلاس خاصی از گراف‌های توری حفره‌دار، یعنی گراف‌های توری L-شکل که یک حفره مستطیلی از آن حذف شده است به طوری که اندازه کل گراف، فرد است و حفره حذف‌شده با مرز L-شکل هیچ اشتراکی ندارد را بررسی می‌کنیم (شکل ۹ یک گراف توری L-شکل با یک حفره مستطیلی را نشان می‌دهد). به‌عنوان یکی دیگر از کاربردهای این مسئله می‌توان به موضوع تعبیه شبکه‌های ارتباطی در مبحث پردازش موازی اشاره کرد. موضوع تعبیه شبکه‌ها یکی از مباحث مهم در طراحی و ارزیابی شبکه‌های ارتباطی است و در آن بررسی می‌شود که آیا می‌توان شبکه‌های ارتباطی موجود را در یک شبکه ارتباطی مشخص تعبیه کرد. در مسئله مطرح‌شده در این مقاله، در واقع نحوه تعبیه یک آرایه خطی (مسیر) در یک توری دو بعدی (گراف توری L-شکل با یک حفره مستطیلی) بررسی می‌شود.

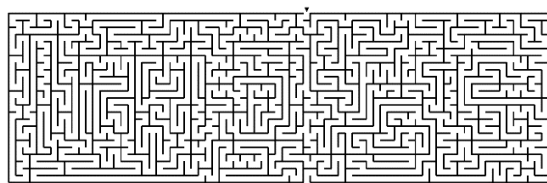
این مقاله در شش بخش تنظیم شده است. در بخش ۱، مقدمه و کاربردی از این مسئله بیان شد. در بخش ۲، تاریخچه کارهای انجام‌شده در گراف‌های توری بیان می‌شود. در بخش ۳، تعاریف و پیش‌نیازهایی که در این مقاله مورد نیاز هستند، مطرح شده‌اند. در بخش ۴، شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی در گراف مورد بررسی این مقاله ذکر شده است. در بخش ۵، الگوریتم ساخت مسیر همیلتونی در این گراف بیان شده است. در نهایت، در بخش ۶، به بیان نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نتایج حاصل‌شده در این مقاله پرداخته‌ایم.

## ۲- تاریخچه پژوهش‌های انجام‌شده روی گراف

### توری

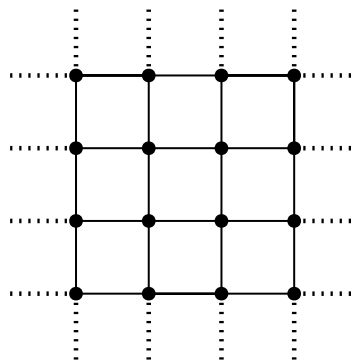
در این بخش، تاریخچه‌ای از کارهای انجام‌شده در رابطه با مسئله مسیر همیلتونی در گراف‌های توری را بیان می‌کنیم.

گراف توری را برای اولین بار در سال ۱۹۷۸، لوسیو<sup>۱</sup> و موگنیا<sup>۲</sup> معرفی کردند، آن‌ها سعی در حل مسئله مسیر همیلتونی داشتند [2]. در سال ۱۹۸۲، ای‌تای<sup>۳</sup> و همکارانش، شرایط لازم و کافی برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  در گراف‌های توری مستطیلی<sup>۴</sup> را بیان کردند و ثابت کردند که این مسئله برای گراف‌های توری عمومی، یک مسئله ان‌پی-کامل است و همچنین الگوریتمی زمان-خطی برای مسیر همیلتونی در



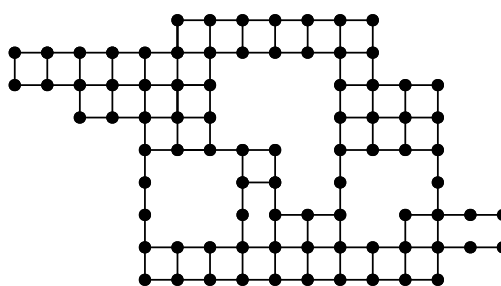
شکل ۱. یکی از کاربردهای مسیر همیلتونی در پیچ و خم تصادفی [۱]

گراف توری نامتناهی<sup>۷</sup> گرافی است که مجموعه رئوس آن نقاط صفحه با مختصات صحیح می‌باشد و دو رأس از طریق یالی به هم متصل هستند اگر و تنها اگر فاصله اقلیدسی<sup>۸</sup> بین آنها یک باشد (شکل ۲).



شکل ۲. گراف توری نامتناهی

گراف توری عمومی<sup>۹</sup>  $G_g$  یک زیرگراف رأس‌القایی متناهی<sup>۱۰</sup> از گراف نامتناهی است (شکل ۳).



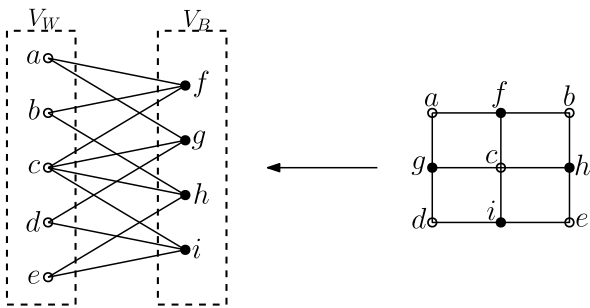
شکل ۳. گراف توری عمومی

هر وجه از گراف توری، سلول<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود. هر وجه متناهی که سلول نباشد، یک حفره<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شود. به هر نوع گراف توری که حفره نداشته باشد گراف توری بدون حفره<sup>۱۳</sup> گفته می‌شود (شکل ۴).

مسئله مسیر (دور) همیلتونی در گراف توری شکل<sup>۲۳</sup> ارائه کردند [۱۷]. اخیراً مسئله بازپیکربندی دوره‌های همیلتونی در گراف‌های توری L شکل و مسیرهای همیلتونی بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  در گراف‌های توری مستطیلی بررسی شده است [19,18].

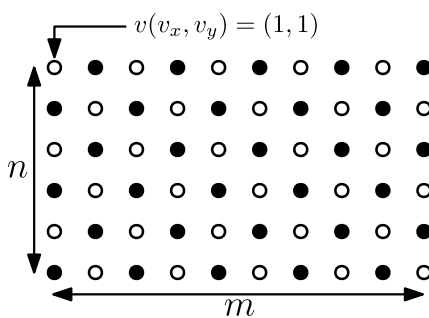
### ۳- تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش به بیان تعاریف و پیش‌نیازهای موردنیاز در این مقاله می‌پردازیم. مختصات رأس  $v$  توسط  $v_x$  و  $v_y$  مشخص می‌شود. رأس  $v$  زوج<sup>۲۴</sup> است اگر  $v_x + v_y$  زوج باشد، در غیر این صورت فرد<sup>۲۵</sup> است. در این مقاله فرض می‌کنیم  $(1,1)$  مختصات رأس گوشه بالا سمت چپ باشد. در گراف توری، درجه<sup>۲۶</sup> هر رأس حداکثر چهار است. یکی از ویژگی‌های گراف‌های توری خاصیت دوبخشی<sup>۲۷</sup> بودن آن‌ها است. از آن‌جا که گراف‌های توری، دوبخشی هستند، می‌توان آن‌ها را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. رئوس زوج را با رنگ سفید و رئوس فرد را با رنگ سیاه رنگ‌آمیزی می‌کنیم. ممکن است تعداد رئوس سیاه و سفید، متفاوت باشند. رنگی که برای آن رئوس بیشتری رنگ‌آمیزی شده باشد رنگ اکثریت<sup>۲۸</sup> نامیده می‌شود و رنگ دیگر رنگ اقلیت<sup>۲۹</sup> نامیده می‌شود. مجموعه رئوس سیاه را با  $V_B$  و مجموعه رئوس سفید را با  $V_W$  نمایش می‌دهیم (شکل ۵).



شکل ۵. ویژگی دوبخشی بودن گراف توری

گراف توری مستطیلی، گراف توری با مجموعه رئوس  $R(m,n) = \{v | 1 \leq v_x \leq m, 1 \leq v_y \leq n\}$  است که با  $R(m,n)$  نمایش داده می‌شود (شکل ۶). گراف  $R(m,n)$ ،  $k$  مستطیلی نامیده می‌شود اگر  $m = k$  یا  $k = n$ . اندازه این گراف به صورت  $m \times n$  تعریف می‌شود.



گراف‌های توری مستطیلی ارائه کردند. آن‌ها همچنین این مسئله باز را مطرح کردند که آیا مسئله دور و مسیر همیلتونی در گراف‌های توری بدون حفره در زمان چندجمله‌ای<sup>۱۵</sup> حل خواهد شد [3]؟ در سال ۱۹۹۴، آفرتی<sup>۱</sup> مسئله دور همیلتونی را برای زیرکلاسی از گراف‌های توری پیشنهاد کرد و الگوریتم زمان-خطی<sup>۱۶</sup> برای ساختن دور همیلتونی ارائه داد [4].

در سال ۱۹۹۵، گو و زلیکووسکی<sup>۲</sup> راه حل چندجمله‌ای برای دور همیلتونی در زیرکلاسی از گراف‌های توری ارائه کردند و حدس زدند که مسئله دور همیلتونی برای گراف‌های توری بدون حفره عمومی ان‌پی-کامل است [5]. در سال ۱۹۹۷، لن‌هارت و آمانس<sup>۳</sup>، مسئله دور همیلتونی را برای گراف‌های توری بدون حفره حل کردند و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n^4)$  ارائه کردند. آن‌ها همچنین این مسئله باز را مطرح کردند که آیا الگوریتم زمان-چندجمله‌ای برای مسئله دور (مسیر) همیلتونی در گراف‌های توری با تعدادی حفره به شکل محدود وجود دارد یا خیر [6]؟ در سال ۲۰۰۲، چن<sup>۴</sup> و همکارانش، الگوریتم ارائه شده در [3] را بهبود دادند و الگوریتمی موازی<sup>۱۷</sup> برای ساخت مسیر همیلتونی بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  در گراف توری مستطیلی (معماری مش) ارائه کردند [7]. در سال ۲۰۰۳، سلمان<sup>۵</sup> و همکارانش، زیرکلاسی‌هایی از گراف توری به نام گراف‌های توری الفبایی را معرفی کردند و بررسی کردند که کدام یک از این گراف‌ها دور همیلتونی دارد [8].

در سال ۲۰۰۷، اسلام<sup>۶</sup> و همکارانش نشان دادند که مسئله دور همیلتونی برای گراف‌های توری شش‌ضلعی<sup>۱۸</sup> ان‌پی-کامل است [9]. در سال ۲۰۰۸، گُردن<sup>۷</sup> و همکارانش نشان دادند که مسئله دور همیلتونی برای گراف‌های توری مثلثی<sup>۱۹</sup> ان‌پی-کامل است [10]. اخیراً مسائل مسیر و دور همیلتونی در گراف‌های توری بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. در سال ۲۰۱۲، کشاورز کوهجردی و باقری<sup>۸</sup>، یک الگوریتم زمان-خطی برای مسئله مسیر (دور) همیلتونی در گراف‌های توری الفبایی خاص ارائه دادند [11]. در سال ۲۰۱۵، هانگ<sup>۹</sup> و همکارانش نشان دادند که مسئله مسیر (دور) همیلتونی در گراف‌های ابر توری<sup>۲۰</sup> ان‌پی-کامل است [12]. در سال ۲۰۱۶، کشاورز کوهجردی و باقری، یک الگوریتم زمان-خطی برای مسئله مسیر (دور) همیلتونی در گراف توری L شکل<sup>۲۱</sup> ارائه کردند [13]. گراف‌های توری L شکل، گراف‌های توری بدون حفره هستند (شکل ۷ را ببینید). در سال ۲۰۱۷، کشاورز کوهجردی و باقری، یک الگوریتم زمان-خطی برای مسئله مسیر (دور) همیلتونی در گراف توری O شکل<sup>۲۲</sup> با اندازه زوج و همچنین اندازه فرد ارائه کردند [14,15]. در سال ۲۰۱۹ نویسنده‌گان، شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی در گراف توری L شکل با یک حفره مستطیلی در حالتی خاص که  $m - k$  زوج است،  $d \geq m - k$ ،  $a = b = 1$  و  $a = 1$  را به دست آوردند [۱۶]. در این مقاله، مسئله برای حالت کلی‌تر حل می‌شود و علاوه بر بیان شرایط لازم یک الگوریتم زمان خطی برای ساخت مسیر همیلتونی بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  در این گراف‌ها ارائه می‌شود. در سال ۲۰۲۰، کشاورز کوهجردی و باقری، یک الگوریتم زمان خطی برای

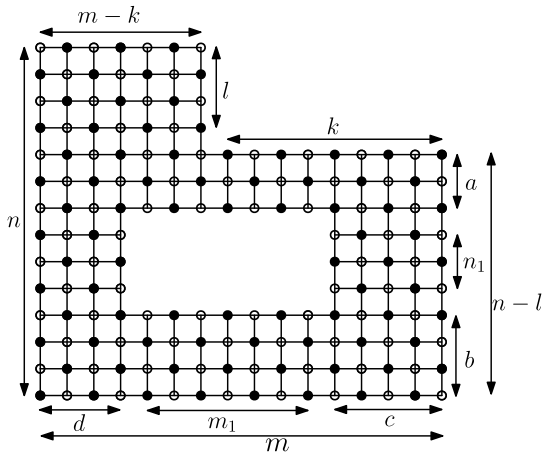
6. Islam  
7. Gordon  
8. Keshavarz-kohjerdi & Bagheri  
9. Hung

1. Afrati  
2. Gue & Zelikovskiy  
3. Lenhart & Umans  
4. Chen  
5. Salman

شکل ۶. گراف توری مستطیلی  
 مختصات رأس گوشه چپ بالا در  $R(m_1, n_1)$  باشد. آن گاه متغیرهای  $d, c, a, b$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

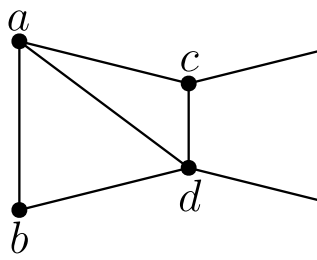
$$d = x_1 - 1, c = m - (d + m_1),$$

$$a = y_1 - (l + 1), b = n - (l + a + n_1)$$



شکل ۹. گراف توری  $L$  شکل با یک حفره مستطیلی

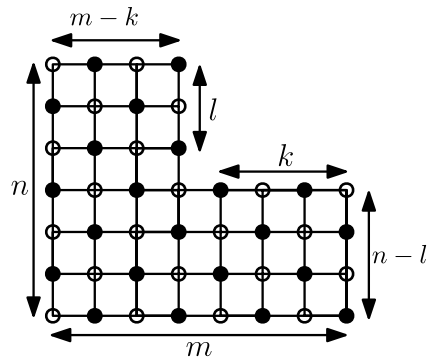
در ادامه،  $L_R(m, n; k, l; m_1, n_1; d, c, a, b)$  را به اختصار با  $L_R$  نمایش می‌دهیم. فرض کنید  $G$  یک گراف توری باشد. نماد  $(G, s, t)$  نشان‌دهنده گراف توری  $G$  به همراه دو رأس معین  $s$  و  $t$  در آن است. بدون از دست رفتن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم:  $s_x \leq t_x$ . در ادامه این مقاله، بدون ایجاد خللی در مسئله، برای جلوگیری از شلوغی شکل‌ها، تمام یال‌های گراف‌های توری را حذف می‌کنیم و فقط در مواقع لزوم آن‌ها را ترسیم می‌کنیم. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف با مجموعه رئوس  $V(G)$  و مجموعه یال‌های  $E(G)$  باشد. دو رأس  $u$  و  $v$  را مجاور<sup>۲۰</sup> می‌نامیم و با  $u \sim v$  نمایش می‌دهیم، هرگاه  $(u, v) \in E(G)$ . دو یال  $(u_1, v_1)$  و  $(u_2, v_2)$  را موازی گوئیم اگر  $u_1 \sim u_2$  و  $v_1 \sim v_2$ . فرض کنید  $G$  یک گراف همبند<sup>۲۱</sup> باشد و  $V_1$  زیرمجموعه‌ای از  $V(G)$  باشد.  $V_1$  یک برش رأسی<sup>۲۲</sup> از  $G$  است اگر،  $G \setminus V_1$  ناهمبند باشد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰. برش رأسی  $\{c, d\}$

رأس  $v$  از گراف  $G$  یک رأس برشی<sup>۲۳</sup> از  $G$  است، اگر  $\{v\}$  یک برش رأسی از  $G$  باشد (شکل ۱۱).

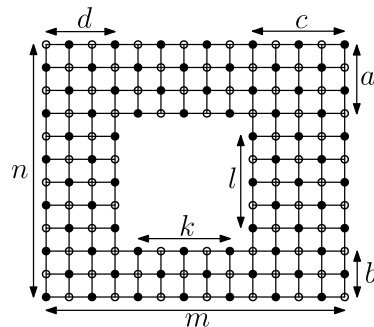
گراف توری  $L$  شکل که با  $L(m, n; k, l)$  نشان داده می‌شود، یک گراف توری مستطیلی  $R(m, n)$  است که یک زیرگراف توری مستطیلی  $R(k, l)$  از گوشه آن حذف شده است به طوری که این دو مستطیل فقط دو مرز مشترک با هم داشته باشند. اندازه این گراف به صورت  $m \times n - k \times l$  تعریف می‌شود (شکل ۷).



شکل ۷. گراف توری  $L$  شکل

گراف توری  $O$  شکل که با  $O(m, n; k, l; d, c, a, b)$  نمایش می‌دهیم، یک گراف توری مستطیلی  $R(m, n)$  است که یک زیرگراف توری مستطیلی  $R(k, l)$  از آن حذف شده است به طوری که هیچ مرز مشترکی بین آن‌ها وجود نداشته باشد و اندازه آن به صورت  $m \times n - k \times l$  تعریف می‌شود. شکل ۸ گراف توری  $O$  شکل را نمایش می‌دهد. اندازه گراف توری فرد است اگر  $||V_B|| - ||V_W|| = 1$  باشد و زوج است اگر  $||V_B|| - ||V_W|| = 0$ . فرض کنید  $(x_1, y_1)$  مختصات رأس گوشه چپ بالا در  $R(k, l)$  باشد آن گاه متغیرهای  $d, c, a, b$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$d = x_1 - 1, c = m - (d + k), a = y_1 - 1, b = n - (a + l)$$



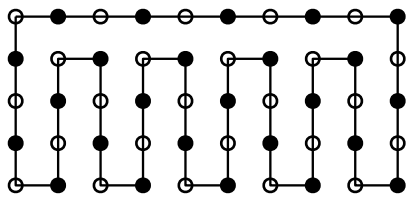
شکل ۸. گراف توری  $O$  شکل

گراف توری  $L$  شکل با یک حفره مستطیلی که با  $L_R(m, n; k, l; m_1, n_1; d, c, a, b)$  نمایش می‌دهیم، یک گراف توری  $L$  شکل  $L(m, n; k, l)$  است که یک زیرگراف توری مستطیلی  $R(m_1, n_1)$  از آن حذف شده است به طوری که هیچ مرز مشترکی بین آن‌ها وجود نداشته باشد و اندازه آن به صورت  $m \times n - k \times l - m_1 \times n_1$  تعریف می‌شود. شکل ۹ گراف توری  $L$  شکل با یک حفره مستطیلی را نمایش می‌دهد. فرض کنید

**قضیه ۳-۲:** [۳] فرض کنید  $P(R(m,n),s,t)$  مسئله مسیر همیلتونی قابل قبول بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  باشد. آن گاه مسیر همیلتونی در  $(R(m,n),s,t)$  در زمان خطی پیدا می شود.

**لم ۳-۱:** [۳] گراف توری مستطیلی  $R(m,n)$  دور همیلتونی دارد، اگر و تنها اگر  $|V_B| = |V_W|$  و  $m, n > 1$

شکل ۱۴ دور همیلتونی در گراف توری مستطیلی زوج را نمایش می دهد. هر دور همیلتونی پیدا شده، همه یال های مرزی روی سه وجه گراف توری مستطیلی را شامل می شود. این نشان می دهد که برای گراف توری مستطیلی با اندازه زوج و  $m, n > 1$ ، همیشه می توانیم دور همیلتونی پیدا کنیم به طوری که همه یال های مرزی را شامل شود، به جز دقیقاً یک وجه از  $R(m,n)$  که شامل تعداد رئوس زوج است.



شکل ۱۴. دور در گراف توری مستطیلی

**قضیه ۳-۳:** [۱۴، ۱۵] گراف توری  $O$  شکل مسیر همیلتونی دارد اگر و تنها اگر سازگار-رنگی باشد و در هیچ یک از شرایط ممنوعه مطرح شده در [۱۴، ۱۵] صدق نکند.

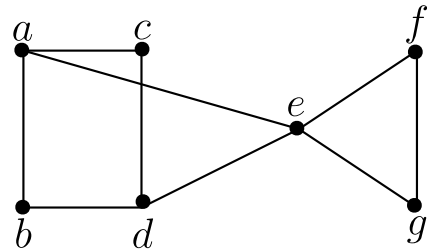
**قضیه ۳-۴:** [۱۴، ۱۵] فرض کنید  $P(O(m,n; k,l; d,c,a,b),s,t)$  مسئله مسیر همیلتونی قابل قبول بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  باشد. آن گاه مسیر همیلتونی در آن در زمان خطی پیدا می شود.

**لم ۳-۲:** [۱۵] گراف توری  $O$  شکل دور همیلتونی دارد اگر و تنها اگر  $|V_B| = |V_W|$  و

یا  $(n = \text{even})$  و  $(b = \text{odd} \leq 3)$  و  $(a = 1)$  یا  $(a, b, c, d > 1)$  یا  $(b > 3)$  یا  $(b = 2)$ ،  $(b = \text{odd}, c = \text{odd})$  یا  $(b = \text{odd}, d = \text{odd})$ .

#### ۴- شرایط ممنوعه در $(L_R, s, t)$

در این بخش، حالاتی که گراف توری  $(L_R, s, t)$  مسیر همیلتونی ندارد، بررسی می شوند و در آخر شرایط لازم در قالب یک قضیه مطرح می شوند. فرض کنید  $(L_R, s, t)$  یک گراف توری  $L$  شکل با یک حفره مستطیلی به همراه دو رأس معین  $s$  و  $t$  باشد. از آنجایی که  $L_R$  یک گراف دوبخشی است، رنگ رئوس هر مسیر باید بین سیاه و سفید تغییر کند. در نتیجه، سازگار-رنگی بودن دو رأس  $s$  و  $t$  شرط لازم برای وجود مسیر همیلتونی در  $(L_R, s, t)$  می باشد. همچنین، علاوه بر شرط (۱م) اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آن گاه  $(L_R, s, t)$  فاقد مسیر همیلتونی است (شکل ۱۵). توجه کنید که حالات یکریخت، حذف شده اند و اندازه کل گراف فرد در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۱. رأس برشی  $e$

**تعریف ۳-۱:** یک تفکیک  $L_R$  از  $L_R$ ، افزایی از آن به یک یا چند زیرگراف توری متناهی مجزای  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  است به طوری که:

$$V(L_R) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup V(G_3) \cup \dots \cup V(G_n)$$

$$V(G_1) \cap V(G_2) \cap V(G_3) \cap \dots \cap V(G_n) = \emptyset$$

دقت کنید که مسیر یا دور در گراف توری بین رئوس سیاه و سفید تغییر می کند.

**تعریف ۳-۲:**  $(G, s, t)$  سازگار-رنگی  $s, t$  است اگر

- $s, t$  رنگ اکثریت داشته باشند یا  $||V_B| - |V_W|| = 1$
- $s, t$  رنگ مخالف هم داشته باشند.

ایتای و همکارانش نشان دادند که اگر یکی از شرایط ممنوعه  $s, t$  زیر رخ دهند، آن گاه مسیر همیلتونی در گراف توری مستطیلی موجود نیست [3].

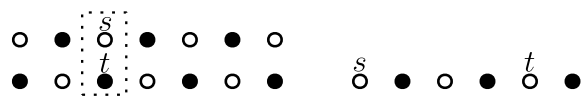
(۱م)  $s$  یا  $t$  رأس برشی یا  $\{s, t\}$  برش رأسی باشند (شکل ۱۲)؛ یا

(۲م) تمام حالت هایی که با حالت زیر یکریخت  $s, t$  باشند (شکل

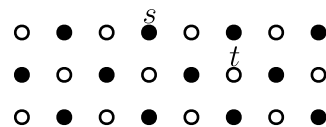
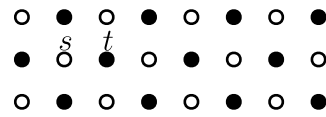
(۱۳):

\*  $m$  زوج باشد،  $n = 3$ ،  $s$  سیاه و  $t$  سفید باشد؛

\*  $s_x < t_x$  و  $s_y = 2$  یا  $s_x < t_x$  و  $s_y \neq 2$  یا  $s_x + 1 < t_x$  و  $s_y = 2$



شکل ۱۲. اولین شرط ممنوعه ایتای و همکارانش



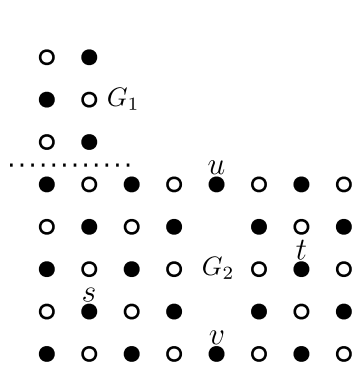
شکل ۱۳. دومین شرط ممنوعه ایتای و همکارانش

**تعریف ۳-۳:** [۳] گراف توری  $(R(m,n),s,t)$  قابل قبول  $s, t$  است اگر

سازگار-رنگی باشد و در هیچ کدام از شرایط (۱م) و (۲م) صدق نکند.

**قضیه ۳-۱:** [۳] گراف توری  $(R(m,n),s,t)$  مسیر همیلتونی دارد اگر

و تنها اگر قابل قبول باشد.



شکل ۱۹. برقراری شرط (م-۵ب) در  $(L_R, S, t)$

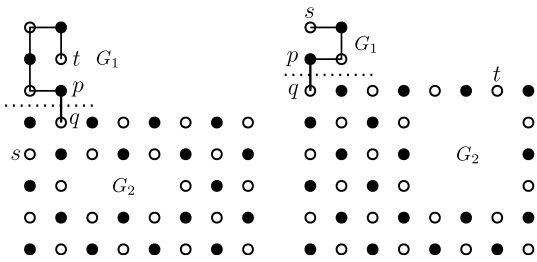
(ج)  $s_y \leq l, t_y > l$  و یکی از حالات زیر رخ دهد:

(ج۱) رنگ اکثریت  $L_R$  سفید باشد،

$$OR \left[ \left( l, p = (1, l), q = (1, l + 1) \text{ زوج باشد} \right) \right]$$

$$\left[ \left( l, p = (2, l), q = (2, l + 1) \text{ فرد باشد} \right) \right]$$

و  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد (شکل ۲۰).



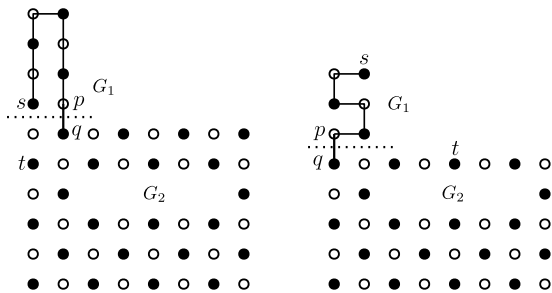
شکل ۲۰. برقراری شرط (م-۵ج۱) در  $(L_R, S, t)$

(ج۲) رنگ اکثریت  $L_R$  سیاه باشد،

$$OR \left[ \left( l, p = (2, l), q = (2, l + 1) \text{ زوج باشد} \right) \right]$$

$$\left[ \left( l, p = (1, l), q = (1, l + 1) \text{ فرد باشد} \right) \right]$$

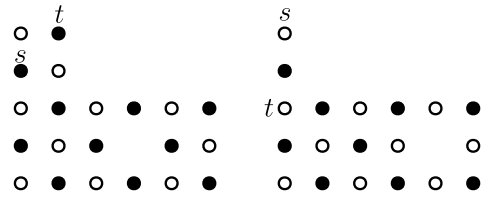
و  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد (شکل ۲۱).



شکل ۲۱. برقراری شرط (م-۵ج۲) در  $(L_R, S, t)$

$$b = d = 2, a = 1, s = (1, l + 1), t = (1, n - 1) \quad (د)$$

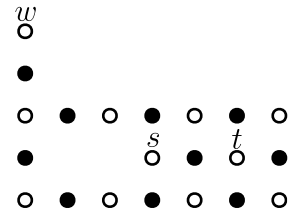
(شکل ۲۲).



شکل ۱۵. شرط (م-۱) در  $(L_R, S, t)$

(م۳)  $s \neq w, t \neq w, \text{degree}(w) = 1, w \in V(L_R)$  (شکل

۱۶).



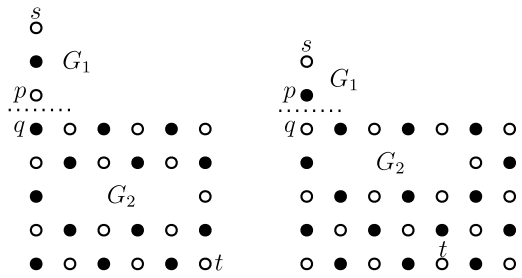
شکل ۱۶. برقراری شرط (م۳) در  $(L_R, S, t)$

(م۴) فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک تفکیک از  $L_R$  باشد به طوری که در آن

$$G_1 = R(m - k, l), G_2 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b),$$

و  $m - k = 1, s = (1, 1), p = (1, l), q = (1, l + 1), t_y > l$

و  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد (شکل ۱۷).



شکل ۱۷. برقراری شرط (م۴) در  $(L_R, S, t)$

(م۵) فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک تفکیک از  $L_R$  باشد به طوری که در آن

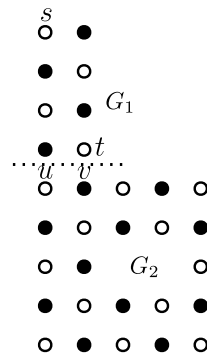
$$G_1 = R(m - k, l),$$

$$G_2 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b),$$

$$m - k = 2$$

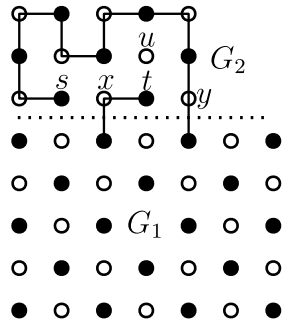
و یکی از حالات زیر رخ دهد:

(الف)  $s_y, t_y \leq l$  (شکل ۱۸)؛

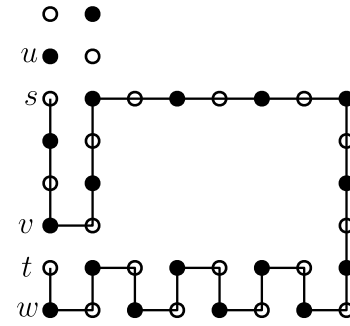


شکل ۱۸. برقراری شرط (م۵-الف) در  $(L_R, S, t)$

(ب)  $s_y, t_y > l$  و  $(G_2, S, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد (شکل ۱۹)؛



شکل ۲۵. برقراری شرط (۸م) در  $(L_R, S, t)$



شکل ۲۶. برقراری شرط (۵-د) در  $(L_R, S, t)$

**تعریف ۴-۱:** گراف توری  $L$ -شکل با یک حفره مستطیلی قابل قبول است اگر سازگار-رنگی باشد و در هیچ یک از شرایط ممنوعه (م) و (۳م) - (۷م) صدق نکند.

**قضیه ۴-۱:** اگر گراف توری  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی داشته باشد، آن گاه قابل قبول است.

**اثبات.** فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت ثابت خواهیم کرد که  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی ندارد. واضح است که اگر  $(L_R, S, t)$  سازگار-رنگی نباشد، آن گاه  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی ندارد. بنابراین بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم  $(L_R, S, t)$  سازگار-رنگی باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که اگر یکی از شرایط (م) و (۳م) - (۷م) برقرار باشد، آن گاه  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی ندارد.

برای شرط (م) شکل ۱۵ را ببینید. اگر  $S$  یا  $t$  رأس برشی یا  $\{S, t\}$  برش رأسی از گراف توری  $L_R$  باشد، آن گاه  $L_R \setminus \{S\}$  یا  $L_R \setminus \{t\}$  یا  $L_R \setminus \{S, t\}$  ناهمبند و شامل حداقل دو مؤلفه همبندی می شود بنابراین، در هر مسیر همیلتونی بین  $S$  و  $t$  باید دو بار از  $S$  یا  $t$  عبور کند. در نتیجه  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی ندارد.

اگر شرط (۳م) برقرار باشد، آن گاه  $degree(w) = 1$  بنابراین، همان طور که در شکل ۱۶ مشخص است،  $w$  نمی تواند در هر مسیر همیلتونی از  $S$  به  $t$  وجود داشته باشد، مگر این که  $w = S$  یا  $w = t$ .

برای شرط (۴م) شکل ۱۷ را ببینید. واضح است که اگر  $(G_2, q, t)$  قابل قبول نباشد، آن گاه هیچ مسیر همیلتونی بین  $q$  و  $t$  وجود ندارد و از آن می توان نتیجه گرفت که هیچ مسیر همیلتونی بین  $S$  و  $t$  وجود نخواهد داشت.

برای شرط (۵-الف) شکل ۱۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک افراز افقی از  $L_R$  باشد به طوری که

$$G_1 = R(2, l)$$

و

$$G_2 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b).$$

چون  $m - k = 2$  این نتیجه می دهد که  $G_1$  زوج است. به علاوه چون  $L_R$  فرد می باشد، نتیجه می گیریم که  $G_2$  فرد است. واضح است که مسیر همیلتونی با شروع از رأس  $S$  باید از طریق یکی از رئوس  $v$  یا  $u$  وارد  $G_2$  شود، رئوس را پیمایش و از رأس  $u$  یا  $v$  خارج شود و به رأس  $t$  برود. چون

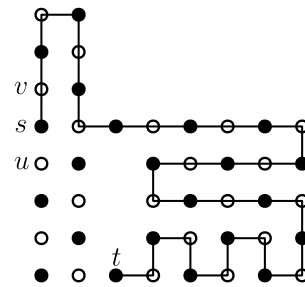
(۵)  $s = (1, l + 1), t = (3, n)$  فرد  $c$  باشد،

$$a = b = 1$$

و

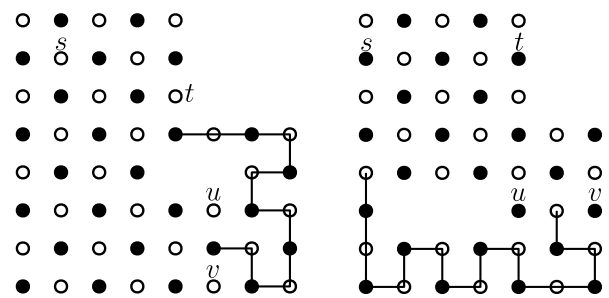
$$d = 2$$

(شکل ۲۳).



شکل ۲۳. برقراری شرط (۵-ه) در  $(L_R, S, t)$

(۶م) فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک تفکیک از  $L_R$  باشد به طوری که در آن  $G_1 = R(m - k, l), G_2 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b)$  و  $G_1$  فرد باشد و  $G_2$  دور همیلتونی نداشته باشد (شکل ۲۴).



شکل ۲۴. برقراری شرط (۷م) در  $(L_R, S, t)$

(۷م) فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک تفکیک از  $L_R$  باشد به طوری که در آن  $G_2 = R(m - k, l), G_1 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b)$

یک تفکیک از  $L_R$  باشد به طوری که در آن  $G_2$  فرد باشد،  $S_y, t_y \leq l$  و  $|V_B(G_1)| = |V_W(G_1)| + 2$   $G_1$  حداقل چهار رأس سفید مشترک با  $G_2$  نداشته باشد (شکل ۲۵).

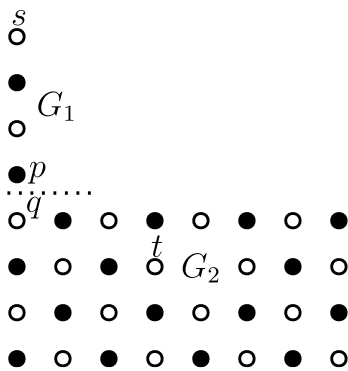
## ۵- الگوریتم ساخت مسیر همیلتونی در $(L_R, S, t)$

در این بخش نشان خواهیم داد که تمام مسائل مسیر همیلتونی در گراف توری  $L$  شکل با یک حفره مستطیلی که قابل قبول هستند، راه حل دارند. در ادامه برای حل این مسئله از تکنیک تقسیم و غلبه<sup>۳۹</sup> استفاده می‌کنیم. در گام نخست، گراف توری  $L_R$  را به دو زیر گراف توری مستطیلی و  $0$  شکل تقسیم می‌کنیم. در گام دوم مسیر یا دور همیلتونی را در این زیر گراف‌ها، بر اساس الگوریتم‌های ارائه شده در [۳، ۱۴، ۱۵] به دست می‌آوریم. در گام آخر مسیر و دور به دست آمده در گام قبل را با هم ترکیب می‌کنیم. توجه کنید که اندازه کل گراف فرد در نظر گرفته شده است. در لم ۵-۱، مسئله مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  را برای حالتی که  $m - k = 1$  است حل می‌کنیم و نحوه ساخت مسیر همیلتونی در آن را شرح می‌دهیم، سپس در لم ۲-۵، مسئله را برای حالتی که  $m - k = 2$  است، حل می‌کنیم. در نهایت در لم ۳-۵، مسئله را برای حالتی که  $(m - k) \times l$  فرد است و  $s_y, t_y \leq l$  حل می‌کنیم.

**لم ۵-۱:** فرض کنید  $P(L_R, S, t)$  مسئله مسیر همیلتونی قابل قبول با  $m - k = 1$  باشد. آن گاه یک افزاز قابل قبول برای  $(L_R, S, t)$  وجود دارد و همچنین آن شامل مسیر همیلتونی است.

**اثبات.** فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک برش افقی از  $L_R$  باشد به طوری که در آن

$$G_1 = R(1, l) \text{ و } G_2 = O(m, n; m_1, n_1; d, c, a, b) \text{ (شکل ۲۶).}$$



شکل ۲۶. نحوه افزاز  $L_R$  در لم ۵-۱

چون  $m - k = 1$  بنابراین  $s = (1, 1)$  و از آن جا که طبق قرارداد رأس با مختصات  $(1, 1)$  سفید است و  $L_R$  فرد است،  $s, t$  فقط سفید می‌توانند باشند. فرض کنید  $p = (1, l)$  و  $q = (1, l + 1)$ . واضح است که  $p \sim q$  و  $q \in V(G_2)$ ، چون  $G_1$  یک گراف توری یک-مستطیلی است و  $s, p$  رؤس انتهایی در آن هستند، بنابراین  $(G_1, s, p)$  در هیچ یک از شرایط (۱م) و (۲م) قرار نمی‌گیرد و قابل قبول است. پس طبق قضیه ۳-۱ مسیر همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را بر اساس الگوریتم ارائه شده در [۳] به دست می‌آوریم (شکل ۲۷). از طرفی اگر  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد، آن گاه  $(L_R, S, t)$  در شرط ممنوعه (۴م) قرار می‌گیرد که تناقض است بنابراین  $(G_2, q, t)$  طبق قضیه ۳-۳ مسیر

$G_2$  فرد است و  $u, v$  ناهم رنگ هستند،  $(G_2, u, v)$  سازگار-رنگی نیست بنابراین مسیر همیلتونی ندارد. در نتیجه  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی ندارد. برای شرط (۵م-ب) شکل ۱۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک افزاز افقی از  $L_R$  باشد به طوری که

$$G_1 = R(2, l)$$

و

$$G_2 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b).$$

چون  $m - k = 2$  این نتیجه می‌دهد که  $G_1$  زوج است و دارای دور همیلتونی می‌باشد. به علاوه چون  $L_R$  فرد است، نتیجه می‌گیریم که  $G_2$  فرد است. حال چون  $G_2$  هیچ مسیر همیلتونی بین  $s, t$  ندارد، پس  $(L_R, S, t)$  نیز قابل قبول نیست.

برای شرط (۵م-ج) شکل ۲۰ را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک افزاز افقی از  $L_R$  باشد به طوری که

$$G_1 = R(2, l)$$

و

$$G_2 = O(m, n - l; m_1, n_1; d, c, a, b).$$

چون  $m - k = 2$  این نتیجه می‌دهد که  $G_1$  زوج است. به علاوه چون  $L_R$  فرد می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که  $G_2$  فرد است. واضح است که مسیر همیلتونی با شروع از رأس  $s$  باید تمامی رؤس  $G_1$  را طی کرده و از طریق رأس  $p$  به رأس  $q$  برود و از آن جا بعد از ملاقات کردن تمامی رؤس  $G_2$  به  $t$  برود. چون  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی ندارد. در نتیجه  $(L_R, S, t)$  مسیر همیلتونی ندارد.

برای شرط (۵م-د) شکل ۲۱ را ببینید. اثبات مشابه شرط (۵م-ج) است. فقط در این جا رنگ اکثریت کل گراف، سیاه است.

برای شرط (۵م-د) شکل ۲۲ را در نظر بگیرید. همان طور که در شکل مشخص است، هیچ مسیر همیلتونی بین دو رأس  $s$  و  $t$  نمی‌توان یافت به طوری که هر سه رأس  $u, v, w$  را شامل شود.

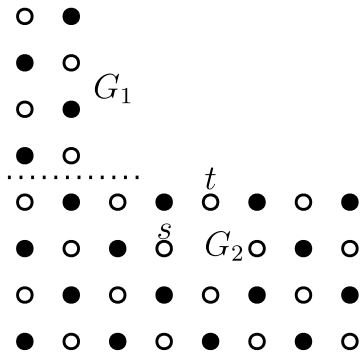
برای شرط (۵م-ه) شکل ۲۳ را در نظر بگیرید. همان طور که در شکل مشخص است، هیچ مسیر همیلتونی بین دو رأس  $s$  و  $t$  نمی‌توان یافت به طوری که هر دو رأس  $u, v$  را شامل شود.

برای شرط (۶م) شکل ۲۴ را در نظر بگیرید. در این شرط با یک بررسی ساده می‌توان دید که همواره نمی‌توان مسیر همیلتونی بین رؤس  $s$  و  $t$  پیدا کرد به طوری که هم زمان هر دو رأس  $u$  و  $v$  را شامل شود.

برای شرط (۷م) شکل ۲۵ را ببینید. در این جا  $s$  و  $t$  هر دو سیاه هستند و داخل  $G_2$  (که فرد و رنگ اکثریت آن سفید است) قرار گرفته‌اند. واضح است که مسیر همیلتونی با شروع از رأس  $s$  باید تعدادی از رؤس  $G_2$  را طی کند و از یکی از رؤس  $x$  یا  $y$  وارد  $G_1$  شود و تمام رؤس آن را پیمایش کند و سپس از طریق یکی از رؤس  $y$  یا  $x$  به  $G_2$  وارد شود و بقیه رؤس  $G_2$  را ملاقات کند و به  $t$  برود. در این حالت حداقل به ۳ مسیر برای پیمایش  $G_2$  نیاز است که دو مسیر زوج و یک مسیر فرد باشد. بنابراین حداقل به ۴ رأس سفید مجاور با  $G_1$  نیاز می‌باشد؛ در این حالت رأسی مثل  $u$  همواره خارج از مسیر قرار می‌گیرد. ■

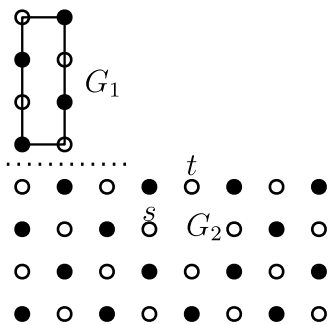


**حالت ۲:**  $l > t_y, s_y$ . فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک برش افقی از  $L_R$  باشد به طوری که در آن  $G_1 = R(2, l)$  و  $G_2 = O(m, n; m_1, n_1; d, c, a, b)$  (شکل ۳۰ را ببینید).



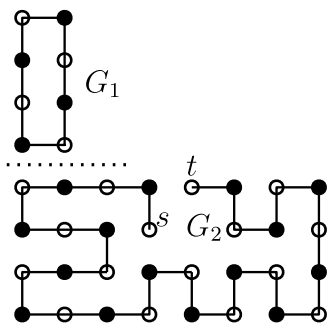
شکل ۳۰. نحوه افزایش  $L_R$  در حالت ۲ از لم ۵-۲

واضح است که  $s, t \in V(G_2)$ . در این جا  $s, t$  می‌توانند سفید یا سیاه باشند. اثبات را برای حالتی که هر دو سفید هستند انجام می‌دهیم. اثبات حالتی که هر دو سیاه هستند، مشابه است. ابتدا ثابت می‌کنیم که دور همیلتونی دارد چون  $m - k > 1$  و  $l > 1$ . طبق لم ۳-۱  $G_1$  دارای دور همیلتونی است. دور همیلتونی در آن را طبق الگوریتم ارائه شده در [۳] به دست می‌آوریم (شکل ۳۱).



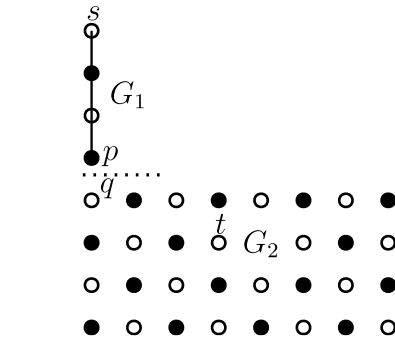
شکل ۳۱. دور همیلتونی در  $G_1$  طبق حالت ۲ از لم ۵-۲

در ادامه ثابت می‌کنیم که  $(G_2, s, t)$  سازگار-رنگی است و مسیر همیلتونی دارد. چون  $m - k = 2$ ،  $G_1$  زوج می‌شود. حال چون  $L_R$  فرد است، این نتیجه می‌دهد که  $G_2$  فرد است. در این حالت به وضوح  $(G_2, s, t)$  سازگار-رنگی است. اگر  $(G_2, s, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد، آن‌گاه  $(L_R, s, t)$  در شرط ممنوعه (م-ب) قرار می‌گیرد که تناقض است پس  $(G_2, s, t)$  طبق قضیه ۳-۳ مسیر همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را بر اساس الگوریتم ارائه شده در [۱۴] به دست می‌آوریم (شکل ۳۲).

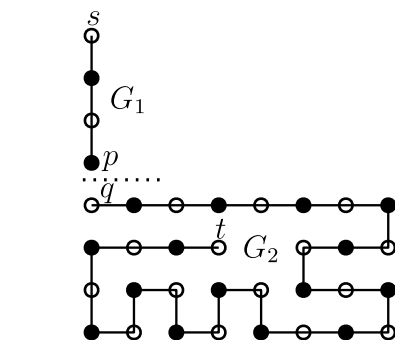


شکل ۳۲. مسیر همیلتونی در  $(G_2, s, t)$  بر اساس حالت ۲ از لم ۵-۲

همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را بر اساس الگوریتم ارائه شده در [۱۴، ۱۵] به دست می‌آوریم (شکل ۲۸).

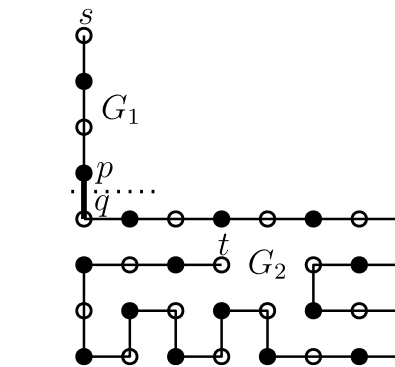


شکل ۲۷. مسیر همیلتونی در  $(G_1, s, p)$  طبق لم ۵-۱



شکل ۲۸. مسیر همیلتونی در  $(G_2, q, t)$  طبق لم ۵-۱

حال در نهایت با اتصال دو رأس  $p, q$  به هم، مسیر همیلتونی در  $(L_R, s, t)$  ساخته می‌شود (شکل ۲۹).

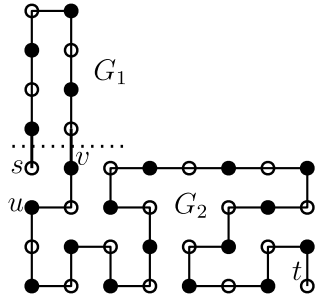


شکل ۲۹. مسیر همیلتونی در  $(L_R, s, t)$  طبق لم ۵-۱

**لم ۵-۲:** فرض کنید  $P(L_R, s, t)$  مسئله مسیر همیلتونی قابل قبول با  $m - k = 2$  باشد. آن‌گاه یک افزایش قابل قبول برای  $(L_R, s, t)$  وجود دارد و همچنین آن شامل مسیر همیلتونی است.

**اثبات.** در ابتدا توجه کنید که تنها یکی از سه حالت زیر برای دو رأس  $s, t$  رخ می‌دهد.

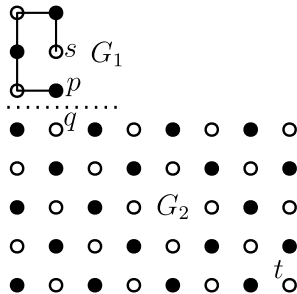
**حالت ۱:**  $t_y \leq s_y$ . واضح است که در این حالت  $(L_R, s, t)$  در شرط ممنوعه (م-الف) قرار می‌گیرد که تناقض است بنابراین، در این حالت  $(L_R, s, t)$  مسیر همیلتونی ندارد.



شکل ۳۶. مسیر همیلتونی تغییر یافته در  $(L_R, S, t)$

**حالت ۳:**  $s_y \leq l, t_y > l$ . فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک برش افقی از  $L_R$  باشد به طوری که در آن  $G_1 = R(2, l)$  و  $G_2 = O(m, n; m_1, n_1; d, c, a, b)$ . فرض کنید  $s, p \in V(G_1)$  و  $q, t \in V(G_2)$  و  $p \sim q$  چون  $m - k = 2$  است،  $G_1$  زوج می‌شود و چون  $L_R$  فرد است، این نتیجه می‌دهد که  $G_2$  فرد است. برای ادامه اثبات، دو زیرحالت زیر را در نظر می‌گیریم:

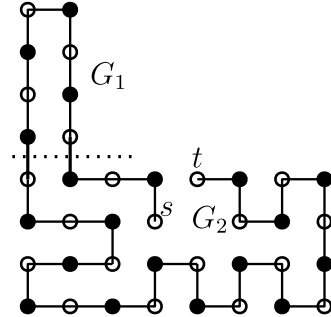
**زیر حالت ۱-۳:**  $(s, t)$  سفید باشند و  $l$  فرد باشد یا  $(s, t)$  سیاه باشند و  $l$  زوج باشد. در این حالت رأس  $p = (2, l)$  سیاه و رأس  $q = (2, l + 1)$  سفید می‌شود. به وضوح  $(G_1, s, p)$  و  $(G_2, q, t)$  سازگار-رنگی هستند. حال ثابت می‌کنیم که  $(G_1, s, p)$  در شرایط (م) و (۲م) قرار نمی‌گیرد.  $(G_1, s, p)$  در شرط (م) قرار می‌گیرد اگر  $1 < s_y = p_y < l$ . این حالت نمی‌تواند رخ دهد چون،  $p_y = l$  که تناقض است. بنابراین،  $(G_1, s, p)$  در شرط (م) قرار نمی‌گیرد. بدیهی است که  $(G_1, s, p)$  در شرط (۲م) قرار نمی‌گیرد بنابراین  $(G_1, s, p)$  قابل قبول است و طبق قضیه ۳-۱ مسیر همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را بر اساس الگوریتم ارائه شده در [۳] به دست می‌آوریم (شکل ۳۷).



شکل ۳۷. مسیر همیلتونی در  $(G_1, s, p)$  طبق زیرحالت ۱-۳ از لم ۵-۲

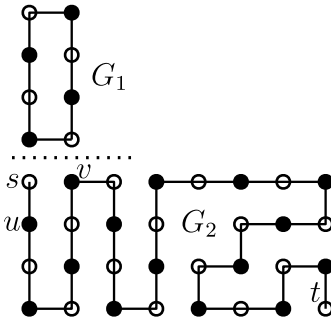
حال ثابت می‌کنیم که  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی دارد. اگر  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد، آن‌گاه  $(L_R, s, t)$  در شرط ممنوعه (م-۵ ج) قرار می‌گیرد که تناقض است. بنابراین  $(G_2, q, t)$  طبق قضیه ۳-۳ مسیر همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را طبق الگوریتم موجود در [۱۴] به دست می‌آوریم (شکل ۳۸).

در نهایت با ترکیب دور همیلتونی و مسیر همیلتونی از طریق دو یال موازی، مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  ساخته می‌شود (شکل ۳۳). در ادامه، روش ترکیب مسیر و دور همیلتونی در  $L_R$  را بیان می‌کنیم. هر مسیر همیلتونی  $P$  در  $G_2$  شامل تمام رئوس  $G_2$  است. بنابراین، شامل یک یال مرزی در  $G_2$  است که موازی با یک یال در  $G_1$  می‌باشد، به جز هنگامی که  $S$  یا  $t$  مجاور با  $G_1$  باشد.



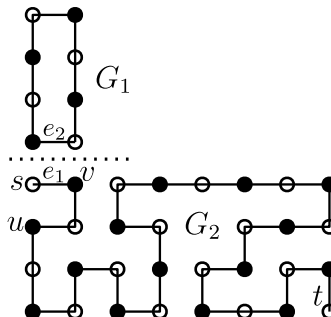
شکل ۳۳. مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  طبق حالت ۲ از لم ۵-۲

در این حالت ممکن است  $G_2$  شامل هیچ یال مرزی که موازی با یالی در  $G_1$  باشد، نباشد (شکل ۳۴).



شکل ۳۴. حالتی که یالی موازی با  $G_1$  در  $G_2$  پیدا نمی‌شود.

فرض کنید یال  $(s, v)$  (یا  $(t, v)$ ) از  $G_2$  مجاور با  $G_1$  باشد. آن‌گاه  $P$  باید شامل یال  $(s, u)$  (یا  $(t, u)$ ) باشد به طوری که  $u$  مجاور با  $G_1$  نیست (شکل ۳۸). بنابراین، با جایگزین کردن نقش  $v$  با  $u$  می‌توانیم مسیر همیلتونی  $P$  را به گونه‌ای تغییر دهیم که شامل یال مرزی مجاور با  $G_1$  شود (شکل ۳۵).



شکل ۳۵. تغییر مسیر همیلتونی در  $G_2$

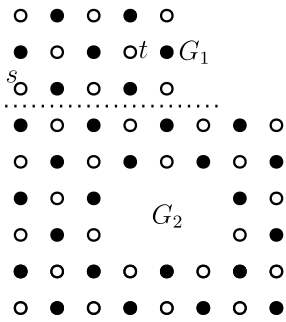
با استفاده از دو یال موازی  $e_1, e_2$  همان‌طور که در شکل ۳۹ نشان داده شده است، می‌توانیم مسیر همیلتونی را با دور همیلتونی ترکیب کنیم (شکل ۳۶).

**لم ۳-۵:** فرض کنید  $P(L_R, S, t)$  مسئله مسیر همیلتونی قابل قبول با افزایش قابل قبول برای  $(L_R, S, t)$  وجود دارد و همچنین آن شامل مسیر همیلتونی است.

**اثبات:** چون  $(m - k) \times l$  فرد است، می توان نتیجه گرفت که  $m - k$  و  $l$  هر دو فرد هستند و  $l \geq 3$ ،  $(m - k)$  فرض کنید  $\{G_1, G_2\}$  یک برش افقی از  $L_R$  باشد (شکل ۴۱) به طوری که در آن

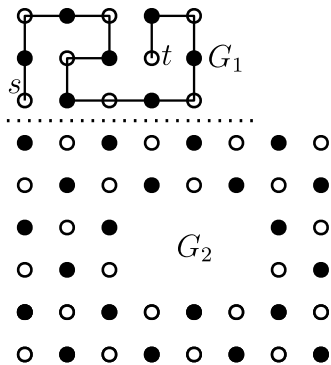
$$G_1 = R(m - k, l)$$

$$G_2 = O(m, n; m_1, n_1; d, c, a, b)$$

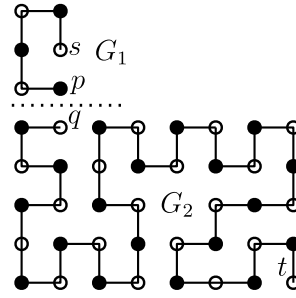


شکل ۴۱. نحوه افزایش  $L_R$  در لم ۳-۵

واضح است که  $s, t \in V(G_1)$  می باشد. در ادامه نشان می دهیم که  $(G_1, S, t)$  سازگار رنگی است و در هیچ کدام از شرایط ممنوعه (۱م) و (۲م) قرار نمی گیرد. همچنین نشان می دهیم که  $G_2$  دور همیلتونی دارد. در نهایت مسیر همیلتونی را در  $(L_R, S, t)$  به دست می آوریم. چون  $(m - k) \times l$  فرد است، نتیجه می گیریم که  $G_1$  فرد است و از آن جا که  $L_R$  فرد است، زیرگراف  $G_2$  زوج می شود. حال چون رؤس  $s, t$  رنگ اکثریت دارند و داخل  $G_1$  که فرد است قرار گرفته اند، واضح است که شرط سازگار رنگی در  $(G_1, S, t)$  برقرار است. از طرفی چون  $l \geq 3$ ،  $(m - k)$  هستند، حداقل یک گراف توری ۳-مسططیلی می شود. بنابراین روشن است که  $(G_1, S, t)$  در هیچ یک از شرایط ممنوعه (۱م) و (۲م) قرار نمی گیرد. پس طبق قضیه ۳-۱ مسیر همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را بر اساس الگوریتم ارائه شده در [۳] به دست می آوریم (شکل ۴۲).

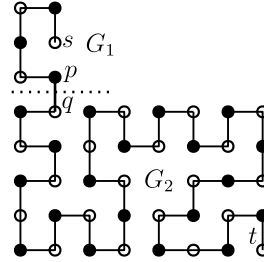


شکل ۴۲. مسیر همیلتونی در  $(G_1, S, t)$  طبق لم ۳-۵



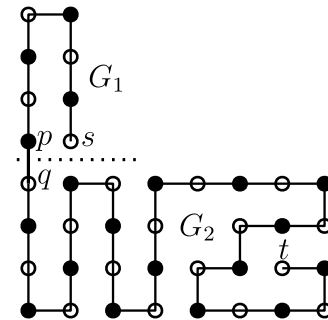
شکل ۳۸. مسیر همیلتونی در  $(G_2, q, t)$  طبق زیرحالت ۳-۱ از لم ۲-۵

مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  از طریق اتصال دو رأس  $p$  و  $q$ ، همان طور که در شکل ۳۹ نشان داده شده است، ساخته می شود.



شکل ۳۹. مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  طبق زیرحالت ۳-۱ از لم ۲-۵

**زیرحالت ۲-۳:**  $(s, t)$  سفید باشند و  $l$  زوج باشد) یا  $(s, t)$  سیاه باشند و  $l$  فرد باشد)). در این حالت رأس  $p = (1, l)$  سیاه و رأس  $q = (1, l + 1)$  سفید می شود. به وضوح  $(G_1, S, p)$  و  $(G_2, q, t)$  سازگار رنگی هستند. اثبات قابل قبول بودن  $(G_1, S, p)$  مانند زیرحالت ۳-۱ است. حال اگر  $(G_2, q, t)$  مسیر همیلتونی نداشته باشد، آن گاه  $(L_R, S, t)$  در شرط ممنوعه (۲-۵ج) قرار می گیرد که تناقض است. بنابراین  $(G_2, q, t)$  طبق قضیه ۳-۳ مسیر همیلتونی دارد. مسیر همیلتونی در آن را طبق الگوریتم موجود در [۱۴] به دست می آوریم. در نهایت مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  از طریق اتصال دو رأس  $p$  و  $q$ ، همان طور که در شکل ۴۰ نشان داده شده است، ساخته می شود. ■



شکل ۴۰. مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  طبق زیرحالت ۳-۲ از لم ۲-۵

در ادامه، محدودیت زیر را در نظر می گیریم:

- $m - k = d$  یا
- $1 \leq d \leq m - k, 1 \leq c \leq k$  یا
- $c = k$

در واقع با اعمال این محدودیت روی مسئله، حرکت حفره محدود می شود و می توان تعداد حالات خاصی که برای مسئله رخ می دهد را کاهش داد.

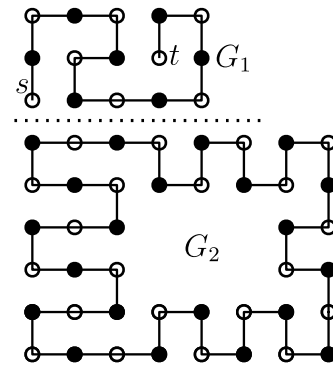
## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی مسئله مسیر همیلتونی در گراف توری  $L$  شکل با یک حفره مستطیلی پرداختیم. ابتدا شرایط لازم را برای حالات خاصی مثل  $m - k = 1$  و  $m - k = 2$ ،  $k = 1$ ،  $l > 1$ ،  $s_y, t_y \leq l$  ارائه دادیم. سپس برای حالات مذکور یک الگوریتم که از تکنیک تقسیم و غلبه استفاده می‌کرد، ارائه دادیم و ثابت کردیم که مسیر همیلتونی بر اساس این الگوریتم در زمان خطی ساخته می‌شود.

## ۷- مراجع

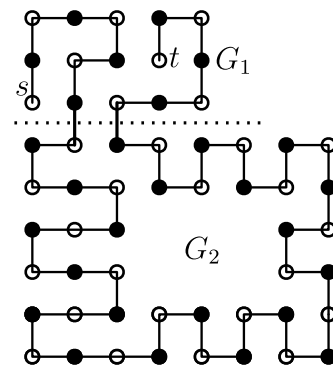
- [۱] K. Hamada, "A Picturesque Maze Generation Algorithm with Any Given Endpoints", *Journal of Information Processing*, vol. 21, no. 3, pp. 393-397, 2013.
- [۲] F. Luccio and C. Mugnia, "Hamiltonian paths on a rectangular chessboard", In *Proceeding of the 16th Annual Allerton Conference*, pp. 161-173, 1978.
- [۳] A. Itai, Papadimitriou, H. Christos, and J. L. Szwarcfiter, "Hamilton paths in grid graphs", *SIAM Journal on Computing*, vol. 11, no. 4, pp. 676-686, 1982.
- [۴] F. Afrati, "The Hamilton circuit problem on grids", *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, vol. 28, no. 6, pp. 567-582, 1994.
- [۵] H. G. Cho and A. Zelikovsky, "Spanning closed trail and Hamiltonian cycle in grid graphs", In *International Symposium on Algorithms and Computation*, Pp. 342-351, 1995.
- [۶] C. Umans and W. Lenhart, "Hamiltonian cycles in solid grid graphs", In *Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Pp. 496-505, 1997.
- [۷] S. D. Chen, H. Shen, and R. Topor, "An efficient algorithm for constructing Hamiltonian paths in meshes", *Parallel Computing*, vol. 28, no. 9, pp. 1293-1305, 2002.
- [۸] A. N. M. Salman, H. Broersma, and E. T. Baskoro, "Spanning 2-connected subgraphs in alphabet graphs, special classes of grid graphs", *J. Autom. Lang. Comb*, vol. 8, no. 4, pp. 675-681, 2003.
- [۹] K. Islam, H. Meijer, Y. N. Rodríguez, D. Rappaport, and H. Xiao, "Hamilton Circuits in Hexagonal Grid Graphs", In *CCCG*, pp. 85-88, 2007.
- [۱۰] V. Gordon, S. Valery, Y. L. Orlovich, and F. Werner, "Hamiltonian properties of triangular grid graphs", *Discrete Mathematics*, vol. 308, no. 24, pp. 6166-6188, 2008.
- [۱۱] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "Hamiltonian paths in some classes of grid graphs", *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- [۱۲] R. W. Hung, C. C. Yao, and S. J. Chan, "The Hamiltonian properties of supergrid graphs", *Theoretical Computer Science*, vol. 602, pp. 132-148, 2015.
- [۱۳] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "Hamiltonian paths in L-shaped grid graphs", *Theoretical Computer Science*, vol. 621, pp. 37-56, 2016.
- [۱۴] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "A linear-time algorithm for finding Hamiltonian  $(s, t)$ -paths in odd-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole", *The Journal of Supercomputing*, vol. 73, no. no. 9, pp. 3821-3860, 2017.
- [۱۵] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "A linear-time algorithm for finding Hamiltonian  $(s, t)$ -paths in even-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole", *Theoretical Computer Science*, vol. 690, pp. 26-58, 2017.
- [16] م. زالی قهی، ف. کشاورز کوهجردی، "مسئله مسیر همیلتونی در گراف توری  $L$ -شکل با یک حفره مستطیلی با اندازه فرد"، در مجموعه مقالات چهارمین

حال اگر  $G_2$  دور همیلتونی نداشته باشد، آن گاه  $(L_R, S, t)$  در شرط ممنوعه (۷م) قرار می‌گیرد که تناقض است. بنابراین  $G_2$  همواره دور همیلتونی دارد. دور همیلتونی در آن را بر اساس الگوریتم ارائه شده در [۱۵] به دست می‌آوریم (شکل ۴۳).



شکل ۴۳. دور همیلتونی در  $G_2$

در نهایت مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  را با ترکیب مسیر به دست آمده در  $G_1$  و دور ساخته شده در  $G_2$ ، به دست می‌آوریم (شکل ۴۴). این ترکیب مسیر با دور مشابه روشی که در لم ۵-۲ مطرح شد، انجام می‌شود. ■



شکل ۴۴. مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  طبق لم ۵-۳

از قضیه ۴-۱ و لم‌های ۵-۱ تا ۵-۳ قضیه زیر نتیجه می‌شود.

**قضیه ۵-۱:** گراف توری  $L_R$  در سه حالتی که در لم‌های ۵-۱ تا ۵-۳ بیان شد، بین دو رأس معین  $s$  و  $t$  مسیر همیلتونی دارد اگر و تنها اگر قابل قبول باشد.

**قضیه ۵-۲:** مسیر همیلتونی به دست آمده در قضیه ۵-۱ در زمان خطی ساخته می‌شود.

**اثبات.** الگوریتم در ابتدا در زمان  $O(1)$  گراف توری  $L_R$  را به دو زیرگراف توری مستطیلی و  $O$ -شکل بر اساس لم‌های ۵-۱ تا ۵-۳ تقسیم می‌کند. در گام دوم مسیر یا دور همیلتونی را در این زیرگراف‌ها، بر اساس الگوریتم‌های ارائه شده در [۳، ۱۴، ۱۵] در زمان خطی به دست می‌آورد. در گام آخر مسیر و دور به دست آمده در گام قبل را در زمان  $O(1)$  با هم ترکیب می‌کند. به این ترتیب الگوریتم در زمان خطی (برحسب اندازه گراف) مسیر همیلتونی در  $(L_R, S, t)$  به دست می‌آورد. ■

کنفرانس بین المللی ترکیبیات، رمزنگاری، علوم کامپیوتر و محاسبات، ص  
۷۶۶-۷۷۵، ۱۳۹۸.

[19] R. I. Nishat, V. Srinivasan, and S. Whitesides, "Reconfiguring Simple s, t Hamiltonian Paths in Rectangular Grid Graphs", *International Workshop on Combinatorial Algorithms, IWOCA 2021: Combinatorial Algorithms*, pp. 501-515, 2021.

[۱۷] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "Linear-time algorithms for finding Hamiltonian and longest (s, t)-paths in C-shaped grid graphs", *Discrete Optimization*, vol. 35, ID. 100554, 2020.

[18] R. I. Nishat and S. Whitesides, "Reconfiguring Hamiltonian Cycles in L-Shaped Grid Graphs", *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science WG 2019*, pp. 325-337, 2019.

---

<sup>21</sup> L-shaped grid graph  
<sup>22</sup> O-shaped grid graph  
<sup>23</sup> C-shaped grid graph  
<sup>24</sup> Even  
<sup>25</sup> Odd  
<sup>26</sup> Degree  
<sup>27</sup> Bi-partite  
<sup>28</sup> Majority color  
<sup>29</sup> Minority color  
<sup>30</sup> Adjacent  
<sup>31</sup> Connected graph  
<sup>32</sup> Vertex cut  
<sup>33</sup> Cut vertex  
<sup>34</sup> Separation  
<sup>35</sup> Color-compatible  
<sup>36</sup> Forbidden conditions  
<sup>37</sup> Isomorphic  
<sup>38</sup> Acceptable  
<sup>39</sup> Divide & conquer

<sup>1</sup> NP-Complete  
<sup>2</sup> Hamiltonian path  
<sup>3</sup> Vertex  
<sup>4</sup> General graphs  
<sup>5</sup> Maze  
<sup>6</sup> Raster image  
<sup>7</sup> Infinite grid graph  
<sup>8</sup> Euclidean distance  
<sup>9</sup> General grid graph  
<sup>10</sup> Finite  
<sup>11</sup> Cell  
<sup>12</sup> Hole  
<sup>13</sup> Solid grid graph  
<sup>14</sup> Rectangular grid graphs  
<sup>15</sup> Polynomial time  
<sup>16</sup> Linear time  
<sup>17</sup> Parallel algorithm  
<sup>18</sup> Hexagonal grid graphs  
<sup>19</sup> Triangular grid graphs  
<sup>20</sup> Super grid graphs